

EXAMEN FINAL HIVER 2008

Date : Dimanche 27 avril 2008, de 14h00 à 17h00

INSTRUCTIONS

1. Détachez la feuille-réponses à la fin de ce cahier et inscrivez-y *immédiatement* votre nom, votre code permanent et votre numéro de groupe.
2. Seule la feuille-réponses doit être remise. Vous y inscrirez vos réponses sous la forme d'une lettre majuscule correspondant à votre choix.
3. Tout texte de référence (manuel, notes de cours, notes personnelles, etc.) est interdit. **Tout cas de plagiat ou de fraude sera soumis au Comité de discipline.**
4. L'usage d'une calculatrice est autorisé.
5. L'étudiant doit placer sa carte d'étudiant (avec photo) sur la table et signer la feuille de présence lors de la remise de sa feuille-réponses.
6. Pas de téléphone cellulaire sur la table.

Question 1 [9 × 1 points]

D'un réseau ferroviaire divisé en N segments de voie, on tire un échantillon aléatoire simple de n segments afin d'évaluer les frais d'entretien et de réparation.

Dans chacun des cas énumérés dans la 2^e colonne (*Paramètre à estimer*) du tableau ci-dessous, identifier le paramètre qu'il s'agit d'estimer. Faites votre choix dans la liste de gauche.

Liste des réponses possibles	Paramètre à estimer [répondre par A, B, ..., ou H]
A: La moyenne μ_y d'une certaine variable Y	1-a) Le nombre moyen de kilomètres de voie par segment
B: La moyenne μ_d d'une certaine variable Y dans un domaine \mathcal{D} .	1-b) La proportion endommagée des kilomètres de voie
C: Le total τ_d d'une certaine variable Y dans un domaine \mathcal{D} .	1-c) La proportion de segments ne nécessitant aucune réparation
D: Le total τ_y d'une certaine variable Y	1-d) Les frais totaux d'entretien encourus par le réseau pendant l'année
E: Le nombre N_c d'unités appartenant à une certaine classe \mathcal{C}	1-e) Les frais moyens d'entretien par kilomètre de voie
F: Le quotient $R = \mu_Y/\mu_X$ de deux variables Y et X	1-f) Les frais moyen d'entretien par segment
G: La proportion p d'unités appartenant à une certaine classe	1-g) Les frais totaux encourus dans les segments situés sur terrain montagneux
H: Aucun des paramètres ci-dessus	1-h) Les frais moyens par segment encourus dans les segments sur terrains montagneux
	1-i) La proportion des frais consacrée à l'entretien préventif

Question 2 [10 × 6 points]

La régie des locaux d'une université, dans le cadre d'une étude visant à évaluer le taux d'utilisation des salles de cours, tire un échantillon aléatoire simple de $n = 30$ salles parmi les $N = 400$ réservées pour une certaine plage horaire. Elle fait visiter les salles durant cette plage horaire et compter le nombre d'étudiants qui s'y trouvent. Le nombre de places est, par ailleurs, connu pour l'ensemble des salles. Les données de l'échantillon sont présentées à l'annexe 1.

Dans tous vos calculs, utilisez les écarts-types et les covariances avec la précision (une décimale) affichée dans les annexes—ne les recalculiez pas. Autrement, retenez le plus grand nombre de décimales possible dans vos calculs intermédiaires.

[Choisissez vos réponses parmi celles proposées au bas de la page]

- 2-a) Estimer le taux d'occupation (proportion des places occupées).
- 2-b) Estimer le nombre total de places occupées en utilisant l'estimateur par la différence et le fait le nombre total de places dans les 400 salles est de **15 000**.
- 2-c) Estimer le nombre total de places dans les salles entièrement vides.
- 2-d) Estimer le nombre total de salles entièrement vides.
- 2-e) Estimer le nombre total d'élèves qui occupent les salles de cours en utilisant l'estimateur par le quotient et le fait que le nombre total de places dans les 400 salles est de **15 000**.
- 2-f) Estimer l'écart type de l'estimateur en 2-a).
- 2-g) Estimer l'écart type de l'estimateur en 2-b).
- 2-h) Estimer l'écart type de l'estimateur en 2-c).
- 2-i) Estimer l'écart type de l'estimateur en 2-d).
- 2-j) On peut estimer le taux d'occupation par le rapport $\frac{\text{Nombre moyen d'élèves par salle dans l'échantillon}}{\text{Nombre moyen de places par salle dans la population}}$. Estimer l'écart-type de cet estimateur. (Le nombre moyen de places par salle dans la population est 37,5).

Question 3 [7 points]

Mêmes données qu'au numéro 2. Utiliser les données de l'échantillon pour estimer la taille de l'échantillon qu'il aurait fallu prélever pour estimer (par la moyenne) le nombre total d'élèves présents dans les salles avec une marge d'erreur de 10 %. [Choisissez vos réponses parmi celles proposées au bas de la page]

Question 4 [7+2+2 points]

Les données présentées au numéro 2 portent sur les salles du pavillon central. Mais il y a aussi **120** salles dans les pavillons périphériques, et un échantillon de **15** salles a été tiré dans l'ensemble de ces pavillons. Les données sont présentées à l'annexe 2.

- 4-a) Estimer le nombre total de salles entièrement vides dans tous les pavillons.
- 4-b) Estimer l'allocation optimale d'un échantillon stratifié de taille **45** pour estimer le nombre total de places occupées : 4-b) (i) n_1 (pavillon central) = ...; 4-b) (ii) n_2 (pavillons périphériques) = ...

Choix de réponses [pour les questions 2, 3 et 4. Choisir l'intervalle qui contient votre réponse]

A 0,051 à 0,059	B 0,071 à 0,075	C 0,076 à 0,080	D 0,086 à 0,089	E 0,09 à 0,10	F 0,11 à 0,14
G 0,16 à 0,18	H 0,48 à 0,54	I 0,59 à 0,62	J 10,1 à 11,2	K 24 à 25	L 27 - 28
M 33 à 35	N 53 à 54	O 85 à 87	P 117 à 119	Q 1169 à 1 274	R 1318 à 1328
S 1521 à 1523	T 2465 à 2468	U 8198 à 8203	V 8 330 à 8 367	W 9064 à 9073	X Aucune des réponses ci-dessus

Question 5 [5 × 1 points]

[Choisir vos réponses parmi celles proposées au bas de la page : inscrire A, B, ... , ou P]

On fait passer à un groupe de 600 femmes et 400 hommes à un test de dextérité manuelle. Les résultats sont les suivants (le « succès » est défini par un score supérieur à un certain seuil) :

	Femme	Hommes	Total
Succès	400	300	700
Échec	200	100	300
Total	600	400	1000

On constate que dans cet échantillon, le taux de succès n'est pas le même chez les femmes et les hommes, et on se demande s'il s'agit d'un phénomène réel ou d'un simple hasard. On effectuera un test statistique pour le savoir. Soient p_f et p_h les probabilités de succès d'une femme et d'un homme, respectivement.

- 5-a) Lequel ou lesquels des énoncés suivants pourrai(en)t servir d'hypothèse nulle?
- E_1 : $p_f = p_h$.
 E_2 : $p_f = 300/400$.
 E_3 : $p_h = 400/600$.
 E_4 : $p_f = p_h = 700/1000$.
- 5-b) Lequel ou lesquels des énoncés suivants pourrai(en)t servir d'hypothèse nulle?
- E_1 : La probabilité de succès est de 50 % pour les femmes et pour les hommes.
 E_2 : La probabilité de succès pour une femme est supérieure à 50 %.
 E_3 : La dextérité manuelle et le sexe sont des variables indépendantes.
 E_4 : Les femmes et les hommes n'ont pas la même probabilité de succès.
- 5-c) Supposons que la valeur calculée de khi-deux est supérieure au point critique. Lequel ou lesquels des énoncés suivants est (sont) justifié(s)?
- E_1 : La dextérité manuelle et le sexe ne sont pas des variables indépendantes.
 E_2 : On peut conclure avec confiance que la dextérité manuelle des femmes est égale à celle des hommes.
 E_3 : On peut conclure avec confiance que les femmes et les hommes n'ont pas le même niveau de dextérité manuelle.
 E_4 : On peut conclure avec confiance que le niveau de dextérité manuelle est plus souvent élevé chez les femmes.
- 5-d) Supposons que la valeur calculée de khi-deux est inférieure au point critique. Lequel ou lesquels des énoncés suivants est (sont) justifié(s)?
- E_1 : On peut conclure avec confiance que la dextérité manuelle et le sexe sont des variables indépendantes.
 E_2 : On peut conclure avec confiance que $p_f = p_h$.
 E_3 : On ne peut pas conclure avec confiance que $p_f \neq p_h$.
 E_4 : On peut conclure avec confiance que le niveau de dextérité manuelle est plus souvent élevé chez les femmes.
- 5-e) Le niveau du test est de 5 %, ce qui signifie que
- E_1 : Si l'hypothèse nulle est vraie, on a 5 % de chance de la rejeter.
 E_2 : On a une probabilité de 95 % d'affirmer correctement qu'il n'y a pas de différence entre hommes et femmes.
 E_3 : Avec une probabilité de 5 %, on affirmera qu'il y a une différence entre hommes et femmes si en fait il n'y en a pas.
 E_4 : Avec une probabilité de 5 %, on affirmera qu'il n'y a pas de différence entre hommes et femmes si en fait il y en a une.

Choix de réponse pour les questions 5-a) à 5-e)

A : Aucun	B : E_1 seulement	C : E_2 seulement	D : E_3 seulement
E : E_4 seulement	F : E_1 et E_2 seulement	G : E_1 et E_3 seulement	H : E_1 et E_4 seulement
I : E_2 et E_3 seulement	J : E_2 et E_4 seulement	K : E_3 et E_4 seulement	L : E_1, E_2 et E_3 seulement
M : E_1, E_2 et E_4 seulement	N : E_1, E_3 et E_4 seulement	O : E_2, E_3 et E_4 seulement	P : Tous

Question 6 [2 points]

On doit tirer un échantillon aléatoire simple de taille n afin d'estimer la moyenne μ d'une variable Y . Laquelle ou lesquelles des affirmations suivantes est (sont) vraie (vraies)?

[Faites votre choix dans la liste au bas de la page].

P_1 : Plus n est grand, plus l'écart-type de l'estimateur sera petit.

P_2 : Une estimation par le quotient sera d'autant meilleure que la variable auxiliaire est indépendante de Y .

P_3 : Une estimation par la différence est sans biais, quelle que soit la taille de l'échantillon.

Question 7 [2 points]

Soit $\hat{\mu}_{opt}$ l'estimateur d'une moyenne μ dans un échantillon stratifié de taille n avec allocation *optimale*; et

soit $\hat{\mu}_{prop}$ l'estimateur de μ dans un échantillon stratifié de taille n avec allocation *proportionnelle*. Dites

lequel ou lesquels des énoncés suivants est (sont) toujours vrai (vrais).

[Faites votre choix dans la liste au bas de la page].

$$P_1 : \sigma_{\hat{\mu}_{opt}} \leq \sigma_{\hat{\mu}_{prop}}$$

$$P_2 : \hat{\sigma}_{\hat{\mu}_{opt}} \leq \hat{\sigma}_{\hat{\mu}_{prop}}$$

$$P_3 : \mu_{\hat{\mu}_{opt}} = \mu_{\hat{\mu}_{prop}}$$

Question 8 [2 points]

Dites lequel ou lesquels des énoncés suivants est (sont) vrai (vrais)?

[Faites votre choix dans la liste au bas de la page].

P_1 : Si \hat{p}_1 est la proportion de fumeurs dans un échantillon de taille 20 tiré *sans* remise parmi les 100 employés de la compagnie A; et si \hat{p}_2 est la proportion de fumeurs dans un échantillon de taille 20 tiré *sans* remise parmi les 500 employés de la compagnie B; et si la proportion de fumeurs (parmi *tous* les employés) est la même dans les deux compagnies, alors $\sigma_{\hat{p}_1} \leq \sigma_{\hat{p}_2}$.

P_2 : Si p est la proportion de fumeurs dans une population de taille 10 000 et \hat{p} est la proportion de fumeurs dans un échantillon de taille 100 tiré de cette population, alors $\sigma_p \geq \sigma_{\hat{p}}$.

P_3 : Si \hat{p}_1 est la proportion de fumeurs dans un échantillon de taille 100 tiré *sans* remise d'une population de 1000 fumeurs et \hat{p}_2 est la proportion de fumeurs dans un échantillon de taille 100 tiré *avec* remise de la même population, alors $\sigma_{\hat{p}_1} \leq \sigma_{\hat{p}_2}$.

Question 9 [2 points]

Deux personnes tirent, indépendamment l'un de l'autre, un échantillon aléatoire simple d'une même très grande population. La taille du premier échantillon est n_1 , celle du deuxième n_2 .

Dites lequel ou lesquels des énoncés suivants sont vrais.

[Faites votre choix dans la liste au bas de la page].

P_1 : Si $n_1 = n_2$, $\hat{\sigma}_{\bar{y}}$ aura la même valeur dans les deux cas

P_2 : Si $n_1 = n_2$, $\sigma_{\bar{y}}$ aura la même valeur dans les deux cas

P_3 : Si $n_1 < n_2$, $\sigma_{\bar{y}}$ sera plus petit dans le premier échantillon que dans le deuxième.

Choix de réponses [pour les questions 6, 7, 8 et 9]

A : Aucune	B : P_1 seulement	C : P_2 seulement	D : P_3 seulement
E : P_1 et P_2 seulement	F : P_1 et P_3 seulement	G : P_2 et P_3 seulement	H : P_1, P_2 et P_3

Annexe 1

Données sur un échantillon de taille **30** tiré d'une population de **400** salles (du pavillon central) réservées pour une plage horaire donnée.

#	Nombre d'élèves	Nombre de places
1	0	25
2	0	50
3	0	60
4	0	50
5	6	80
6	8	80
7	20	20
8	2	25
9	19	20
10	19	25
11	20	25
12	23	30
13	22	30
14	23	25
15	23	30
16	24	25
17	24	25
18	29	30
19	35	40
20	37	40
21	37	50
22	41	60
23	42	65
24	57	70
25	45	50
26	43	50
27	44	50
28	44	60
29	46	50
30	47	50
<i>n</i>	30	30
Moyennes	26	43
Écart-types corrigés	16,8	17,8
Covariance corrigée (entre le nombre d'élèves et le nombre de places)	64,5	

Annexe 2

Données sur un échantillon de taille **15** tiré d'une population de **120** salles réservées (dans les pavillons périphériques) pour une plage horaire donnée.

#	Nombre d'élèves	Nombre de places
1	0	40
2	0	30
3	0	30
4	0	30
5	27	30
6	27	30
7	29	30
8	33	40
9	35	40
10	37	40
11	38	40
12	40	45
13	42	50
14	44	50
15	53	60
<i>n</i>	15	15
Moyennes	27	39
Écart-types corrigés	18,1	9,3
Covariance corrigée (entre le nombre d'élèves et le nombre de places)	121,1	

Formulaire MAT2080 Examen final

Résumé des paramètres, leur estimateur, l'écart-type de l'estimateur, et l'estimateur de l'écart-type de l'estimateur ($f = n/N$)

Paramètre	Estimateur	Écart-type de l'estimateur	Estimateur de l'écart-type de l'estimateur
Moyenne μ	\bar{y}	$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{1-f} \frac{S}{\sqrt{n}}$	$\hat{\sigma}_{\bar{y}} = \sqrt{1-f} \frac{s}{\sqrt{n}}$
Proportion p	$\hat{p} = \frac{X}{n}$	$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{p}} = \sqrt{1-f} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n-1}}$
Un quotient $R = \frac{\mu_y}{\mu_x}$	$\hat{R} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$	$\sigma_{\hat{R}} \approx \frac{\sqrt{1-f}}{\mu_x} \frac{\sqrt{S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}}}{\sqrt{n}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{R}} = \frac{\sqrt{1-f}}{\bar{x}} \frac{\sqrt{s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{xy}}}{\sqrt{n}}$
Moyenne μ Estimation par la différence	$\hat{\mu}_{yd} = \mu_x + (\bar{y} - \bar{x})$	$\sigma_{\hat{\mu}_{yd}} = \sqrt{1-f} \frac{\sqrt{S_y^2 + S_x^2 - 2S_{xy}}}{\sqrt{n}}$	$\hat{\sigma}_{\hat{\mu}_{yd}} = \sqrt{1-f} \frac{\sqrt{s_y^2 + s_x^2 - 2s_{xy}}}{\sqrt{n}}$
Moyenne μ Estimation par le quotient	$\hat{\mu}_{yq} = \mu_x \hat{R}$	$\sqrt{1-f} \frac{\sqrt{S_y^2 + R^2 S_x^2 - 2RS_{xy}}}{\sqrt{n}}$	$\sqrt{1-f} \frac{\sqrt{s_y^2 + \hat{R}^2 s_x^2 - 2\hat{R}s_{xy}}}{\sqrt{n}}$
Moyenne μ_d d'un domaine \mathfrak{D}	\bar{y}_d : Moyenne du domaine dans l'échantillon		$\sqrt{1-\frac{n_d}{N_d}} \frac{s_d}{\sqrt{n_d}}$ ou $\sqrt{1-\frac{n}{N}} \frac{s_d}{\sqrt{n_d}}$ selon que N_d est connu ou pas
Total $\tau_d = N_d \mu_d$ d'un domaine (N_d connu)	$T_d = N_d \bar{y}_d$		$N_d \sqrt{1-\frac{n_d}{N_d}} \frac{s_d}{\sqrt{n_d}}$
Total $\tau_d = N_d \mu_d$ d'un domaine (N_d inconnu)	$\hat{T}_d = \hat{N}_d \bar{y}_d = N \bar{y}'$ où $\hat{N}_d = \frac{n_d}{n} N$		$N \sqrt{1-f} \frac{s'}{\sqrt{n}}$

Taille d'échantillon

Estimation de la moyenne

La taille d'échantillon nécessaire pour que la marge d'erreur absolue soit égale à E est

$$n = \frac{n_o}{1 + \frac{n_o}{N}} \quad \text{où } n_o = \left(\frac{2S}{E} \right)^2.$$

La taille d'échantillon nécessaire pour que la marge d'erreur relative soit égale à R est

$$n = \frac{n_o}{1 + \frac{n_o}{N}} \quad \text{où } n_o = \left(\frac{2S}{R\mu} \right)^2.$$

Estimation d'une proportion p

Pour estimer une proportion p de telle sorte que la marge d'erreur absolue soit égale à E , la taille

approximative de l'échantillon qu'il faut tirer est donnée par $n = \frac{n_o}{1 + \frac{n_o}{N}}$ où $n_o = \frac{4p(1-p)}{E^2}$.

Pour estimer une proportion p de telle sorte que la marge d'erreur *relative* soit égale à R , la taille approximative de l'échantillon qu'il faut tirer est donnée par $n = \frac{n_o}{1 + \frac{n_o}{N}}$ où $n_o = \frac{4(1-p)}{R^2 p}$.

Échantillonnage par strates

L'estimateur de la moyenne dans un échantillon stratifié est $\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^L W_h \bar{y}_h$.

Son écart type est $\sigma_{\bar{y}_{st}} = \sqrt{\sum_{h=1}^L W_h^2 \sigma_{\bar{y}_h}^2}$ où $\sigma_{\bar{y}_h}^2 = (1-f_h) \frac{S_h^2}{n_h}$ et $f_h = n_h/N_h$.

L'estimateur d'une proportion dans un échantillon stratifié est $\hat{p}_{st} = \sum_{h=1}^L W_h \hat{p}_h$.

Son écart-type est estimé par $\hat{\sigma}_{\hat{p}_{st}} = \sqrt{\sum_{h=1}^L W_h^2 (1-f_h) \frac{\hat{p}_h(1-\hat{p}_h)}{n_h-1}}$.

L'allocation optimale pour l'estimation d'une moyenne dans un échantillon stratifié est donnée par

$$n_h \text{ proportionnels aux } W_h S_h$$

Régression

<p>Variance corrigée :</p> $s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2}{n-1}$	<p>Covariance corrigée :</p> $s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1}$
<p>Coefficient de corrélation :</p> $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$	<p>Droite des moindres carrés $y = b_0 + b_1 x$:</p> $b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} ; b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$

Statistique pour tester l'indépendance : $Z = \frac{\sqrt{n-2} r}{\sqrt{1-r^2}}$

Test du khi-deux

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i} = \sum \frac{O_i^2}{T_i} - n,$$

Points critiques ($\alpha = 5\%$) d'une loi khi-deux

v	χ_v^2	v	χ_v^2	v	χ_v^2	v	χ_v^2
1	3,8415	6	12,5916	11	19,6751	16	26,2962
2	5,9915	7	14,0671	12	21,026	17	27,5871
3	7,8147	8	15,5073	13	22,362	18	28,8693
4	9,4877	9	16,919	14	23,6848	19	30,1435
5	11,0705	10	18,307	15	24,9958	20	31,4104

Nom :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Prénom :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Code permanent :

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Groupe:

--	--

Question	Réponse	
1-a)	A	1
1-b)	F	1
1-c)	G	1
1-d)	D	1
1-e)	F	1
1-f)	A	1
1-g)	C	1
1-h)	B	1
1-i)	F	1
2-a)	I	6
2-b)	U	6
2-c)	T	6
2-d)	N	6
2-e)	W	6
2-f)	B	6
2-g)	S	6
2-h)	Q	6

Question	Réponse	
2-i)	K	6
2-j)	C	6
3	P	7
4-a)	O	7
4-b) (i)	M	2
4-b)(ii)	J	2
5-a)	B	1
5-b)	D	1
5-c)	G	1
5-d)	D	1
5-e)	G	1
6	F	2
7	F	2
8	F	2
9	C	2